Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Теорія функцій»

для студентів спеціальності

014 «Середня освіта (Математика)»

Рекомендовано:
Вченою Радою факультету машинобудування
Протокол № 01-23/08 від «28» серпня 2023 р.

2023-2024 навчальний рік

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни

«Теорія функцій»

для студентів спеціальності

014 «Середня освіта (Математика)»

Затверджено
на засіданні
методичної ради
Протокол № 8 від 20.05.2021

Краматорськ 2021

УДК 517

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Теорія функцій» для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»/ Укл.: О. Г. Ровенська. – Краматорськ: ДДМА, 2021. – 48 с.

Методичні вказівки «Теорія функцій» містять у стислому вигляді основний теоретичний матеріал з курсу теорії функцій, практичні вправи та методичні матеріали щодо організації самостійної роботи й комплексного контролю знань студентів. Призначений для студентів вищих навчальних закладів, викладачів математичних дисциплін.

Укладач О. Г. Ровенська, доц.

Відпов. за вип. В. М. Астахов, доц.

ЗМІСТ

1 ВПРАВИ ДО РОЗДІЛІВ КУРСУ

1 Вправи до розділу «Поняття множини. Види множин. Потужність»

Основні теоретичні відомості. Об’єднання: $C = A \bigcup B$ (рис. 1).

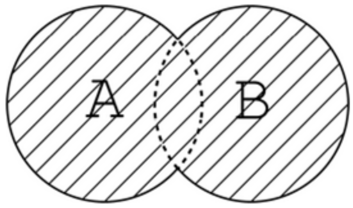

Рисунок 1

Перетин: $C = A \bigcap B$ (рис.2).

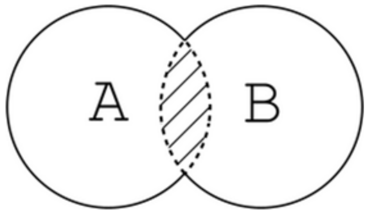

Рисунок 2

Різниця $C = A / B$ (рис. 3).

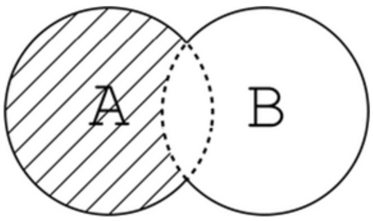

Рисунок3

Симетрична різниця $C = A \Delta B$ (рис. 4).

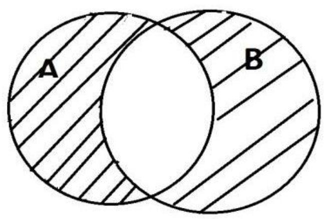

Рисунок 4

Доповнення S/A (рис. 5).

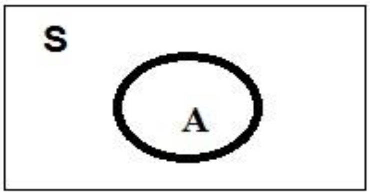

Рисунок 5

Завдання 1.1. Виконати операції над множинами $A=\{2,5,7,9\}$, $B=\{3,5,8,9,12\}$.

Розв'язання:

$$A\bigcup B=\{2,3,5,7,8,9,12\},$$
$$A\bigcap B=\{5,9\},$$
$$A/B=\{2,7,\}.$$

Завдання 1.2. Виконати операції над множинами $X=\{x:-3\le x\le 8\}$, $Y=\{x:-5\le x\le 6\}$.

Розв'язання:

$$X\bigcap Y=\{x:-3\le x<6\},$$
$$X\bigcup Y=\{x:-5<x\le 8\}.$$

Завдання 1.3. Знайти перетин таких множин:

а) X – множина двохзначних натуральних чисел, Y – множина парних натуральних чисел;

б) X – множина всіх паралелограмів, Y – множина трапецій.

Розв'язання:

а) $X=\{10,11,...,99\}$, $Y=\{2,4,...,98,...\}$, $X\bigcap Y=\{10,12,14,...,98\}$;

б) $\emptyset$.

Завдання 1.4. Задані множини

$$A=\{10\},\ B=\{10,15\},\ C=\{5,10,15\}.$$

Визначити входження однієї множини в іншу.

Розв'язання:

$$A\in B,\ C\in A,\ C\in B.$$

Завдання 1.5. Довести властивості операцій над множинами:

а) $A\bigcup B=B\bigcup A$;

б) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

Розв’язання:

а) Нехай $x \in A \bigcup B$, тоді $x \in A$ або $x \in B$. Звідси $x \in B \bigcup A$. Обернене доводиться подібним чином.

б) Нехай $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$ тоді або $x \in A$, або $x \in (B \bigcap C)$, $x \in (A \bigcup B)$ і $(A \bigcup C)$. Тоді $x \in A \bigcup B$, $x \in A \bigcap C$. Отже, $x \in B \bigcup C$, $x \in A$, $x \in B \bigcup C$. $x \in A \bigcup B$ і $x \in A \bigcap B$.

$(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$, $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

Доведемо обернене. Нехай $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$, то $x \in (A \bigcup B)$ і $x \in (A \bigcup C)$. Отже, $x \in A \bigcup B$ і $x \in A \bigcup C$. Із цього слідує, що $x \in A$, або $x \in B \bigcap C$, $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$ (рис. 5).

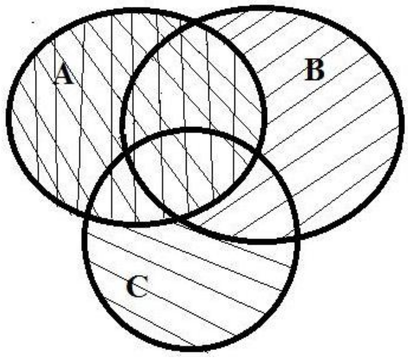

Рисунок 5

Завдання 1.6. Знайти доповнення до множини натуральних парних чисел

$$A = \{x : x + 2k,\ k \in N\}.$$

Розв’язання:

$$N / A = \{x : x = 2k + 1,\ k \in N\}.$$

Завдання 1.7. Довести, що множина злічення:

$$\{n \in N : n = k^2,\ k \in N\}.$$

Розв’язання. Числам 1, 4, 9, 16, 25, 36... поставимо у відповідність числа 1, 2, 3, 4, 5, 6,... Отже, множина злічення.

Завдання 1.8. Довести, що множина додатних раціональних чисел

$$R = \left\{1,2,3,4,5,6,7,...,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},...,\frac{1}{3},\frac{2}{3}...\right\}$$

злічення.

Розв’язання. Наступні множини є зліченними:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,...$$
$$\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},...,$$
$$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3},...,$$
$$\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},....$$

Об’єднання зліченного числа зліченних множин є зліченним.

Завдання 1.9. Довести, що множина відрізків на прямій, які попарно не перетинаються, скінченна або зліченна (рис. 6).

Рисунок 6

Розв’язання. Кожен відрізок має раціональну точку, причому для відрізків, що не перетинаються, ці точки різні, отже, множина є зліченною.

2 Вправи до розділу «Метричні простори»

Основні теоретичні відомості. Метрика – додатнозначна функція, що задовольняє умовам:

1. $\rho(x,y)=0$ тоді й тільки тоді, коли $x=y$ (аксіома тотожності).
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксіома симетричності).
3. $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ (аксіома трикутника).

Відображення множин:

$f:M\to N$, $a\in M$, $b\in N$, $b=f(a)$, a – прообраз, b – образ.

Якщо $f(M)=N$, відображення є сюр'єкцією.

Якщо за умови $x\neq x_2$ випливає $y_1=f(x_1)\neq y_2=f(x_2)$, відображення є ін'єкцію.

Разом сюр'єкція та ін'єкція – це біекція.

Класифікація точок метричного простору. Точка x_0 називається *граничною* точкою множини M з X (M є підмножиною простору X), якщо будь-який її окіл містить хоча б одну точку з множини M.

Внутрішньою точкою множини є точка, що входить у цю множину зі своїм околом.

Ізольована точка множини – точка, у якій існує окіл, який не містить інших точок цієї множини.

Завдання 2.1. Довести, що задані функції на вказаних множинах є метриками:

а) $\rho(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$ на множині R;

б) $\rho(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{n}$ на множині l_2.

Розв'язання:

а) Перевіримо виконання аксіом метрики:

1. $x = y,\ \rho(x,y) = \min\{1, |x-x|\} = 0$.
2. $\rho(x,y) = \min\{1, |x-y|\} = \min\{1, |y-x|\} = \rho(y,x)$,
3. $\rho(x,z) = \min\{1, |x-z|\} = \min\{1, |x-y+y-z|\} \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Усі аксіоми виконуються.

б) Перевіримо виконання аксіом метрики:

1. $x = y,\ \rho(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - x_n|}{n} = 0$.
2. $\rho(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n - x_n|}{n} = \rho(y,x)$.
3. $\rho(x,z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - z_n|}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n + y_n - z_n|}{n} \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Усі аксіоми метрики виконуються.

Завдання 2.2. Довести, що функція

$$\rho(x,y) = \max_{1\le n\le m} |x_n - y_n|$$

на множині R^n є метрикою.

Розв'язання. Перевіримо виконання аксіом метрики.

1. $x = y,\ \rho(x,y) = \max\limits_{1\le n\le m} |x_n - x_n| = 0$.
2. $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le n\le m} |x_n - y_n| = \max\limits_{1\le n\le m} |y_n - x_n| = \rho(y,x)$.
3. $\rho(x,z) = \max\limits_{1\le n\le m} |x_n - z_n| \le \max\limits_{1\le n\le m} |x_n - y_n| + \max\limits_{1\le n\le m} |y_n - z_n| \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Аксіоми метрики виконуються.

Завдання 2.3. Яка із указаних функцій, що відображають $[0,1] \to [0,3]$, є сюр'єкцією, ін'єкцією, біекцією?

а) $f(x) = 3^x$, б) $f(x) = 12(x - 1/2)^2$, в) $f(x) = 3x$.

Розв'язання:

а) $y \in [0,1]$ – розв'язку немає, відображення не сюр'єкція, ін'єкція (рис.9).

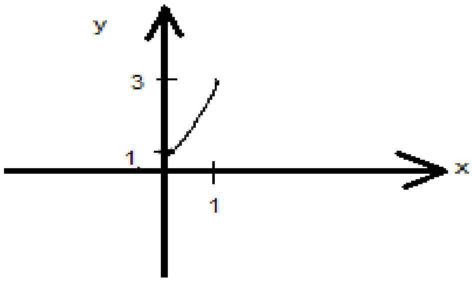

Рисунок 9

б) $y_1 = y_2$, наприклад, при $x_1 = 1$, $x_1 = -1$, не сюр'єкція, не ін'єкція (рис. 10).

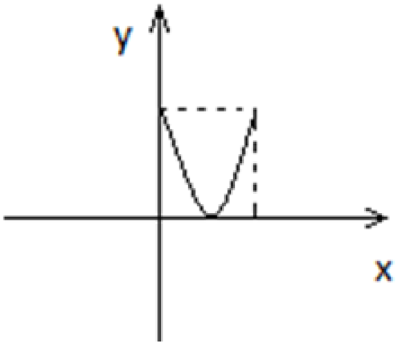

Рисунок 10

в) Задана функція ін'єкція і сюр'єкція, отже – біекція (рис. 11).

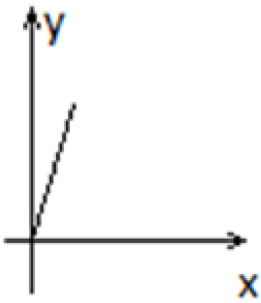

Рисунок 11

Завдання 2.4. Довести, що якщо

$$f : E \to F,\ A \subset F,\ B \subset F,$$

то

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Розв'язання. Якщо $x \in f^{-1}(A \bigcap B)$, то $f(x) \in A$ і $f(x) \in B$. Звідси $x \in f^{-1}(A)$ і $x \in f^{-1}(B)$. Отже, $x \in f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$.

Завдання 2.5. Указати граничні, внутрішні й ізольовані точки множин:

а) $A = [0;3) \bigcup \{6\}$, б) $E = \{1;1/4;1/16;...\}$.

Розв'язання:

а) граничні $[0;3]$, внутрішні $(0;3)$, ізольовані $\{6\}$.

б) граничні $\{0\}$, внутрішніх точок немає, ізольовані $\{1;1/4;1/16;...\}$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.6. Перевірити, чи є функції метриками на зазначених множинах:

а) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$, R;

б) $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$, $X = [0;\infty)$.

Завдання 2.7. Класифікувати точки множин:

а) $A = [0;3) \bigcup (4;5) \bigcup \{-1\} \bigcup \{10\}$; б) $A = \{(x_1, x_2),\ x_{1,2} \in Q\}$.

Завдання 2.8. Указати множину, яка має рівно три граничні точки.

3 Вправи до розділу «Відкриті та замкнені множини»

Основні теоретичні відомості. Точка x_0, що належить простору X, називається *границею* послідовності $\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n...$ якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що, починаючи з нього, усі числа послідовності входять в ε-окіл точки x_0.

Точка x_0 називається *границею* послідовності $\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n...$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$.

Множина називається *замкненою*, якщо вона співпадає зі своїм замиканням (тобто усі граничні точки містяться в цій множині).

Відкритою називається множина, яка складається тільки з внутрішніх точок.

Завдання 3.1. Знайти границю послідовності

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...,\right\}.$$

Розв'язання. Доведемо за означенням, що число 0 є границею цієї послідовності.

I спосіб:

$$\rho(0, x_N) < \varepsilon,$$
$$\rho(0, x_N) = |0 - x_N| < \varepsilon => |x_N < \varepsilon|,$$
$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$
$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon},$$
$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \ N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right].$$

Наприклад, якщо $\varepsilon = 100$, то $N = 10$.

II спосіб:

$$\lim_{n\to\infty}\left|0 - \frac{1}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Завдання 3.2. Указати замкнені й відкриті множини:

1. $A = [0;3) \cup \{6\}$.
2. $A = [0;3)$.
3. $A = (-2;1)$.
4. $A = [0;7]$.

Розв'язання:

1. Відкрита.
2. Відкрита.
3. Відкрита.
4. Замкнена.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.3. Довести, що множина $A = (-5;3) \cap [0;1] \cup \{2\}$ є замкненою множиною.

4 Вправи до розділу «Повні та компактні метричні простори»

Основні теоретичні відомості. Нехай X – метричний простір і $\{x_n\}$ – послідовність елементів цього простору. Послідовність $\{x_n\}$ називається *фундаментальною*, якщо існує номер N, починаючи з якого для всіх номерів $m > N$ виконується нерівність $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0$.

Простір, у якому кожна фундаментальна послідовність збігається (до точки цього простору), називається *повним.*

Нехай X – довільний метричний простір. Множина $M \in X$ називається *компактною*, якщо з будь-якої послідовності $\{x_n\}$ цієї множини можна виділити збіжну послідовність $\{x_n\}$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 4.1. Перевірити, чи є послідовність $\{f_n(x)\} = \dfrac{1}{x^n}$ фундаментальною в просторі $C_{2[1;3]}$.

5 Вправи до розділу «Принцип стискальних відображень»

Основні теоретичні відомості. Нехай X – метричний простір і $f(x)$ – відображення метричного простору в собі. Відображення $f(x)$ називається *стискальним* відображенням *(стиском)*, якщо для будь-яких двох точок $x,\ y$, які належать X, існує число $\alpha < 1$ таке, що виконується нерівність

$$\rho(f(x), f(y)) \le \rho(x; y).$$

$f(x) = x$ – нерухома точка.

Завдання 5.1. Показати, що функція $f(x) = x^2$ відображає відрізок $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$. Чи є це відображення стискальним?

Розв’язання. Зробимо креслення (рис. 10).

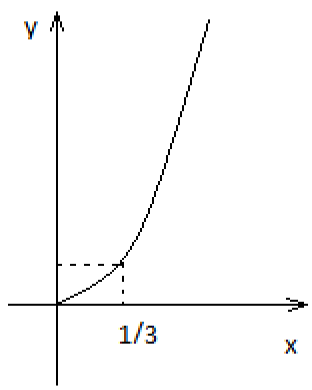

Рисунок 10

Оскільки $0 \le x^2 \le \frac{1}{9}$, то $\left[0, \frac{1}{9}\right] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Відображає відрізок у себе. Нехай $c \in [x, y] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Оскільки

$$|f'(x)| = 2c,$$

$$0 \le ac \le \frac{2}{3},\ a < 1$$

$$0 \le c \le \frac{1}{3},$$

– відображення стискальне.

Завдання 5.2. Чи є стискальним відображення $f(x) = x + \frac{1}{x}$ напівпрямої $[1, \infty)$ у себе?

Розв’язання:

$$|f'(x)| = |1 - 1/x^2|,.$$

$$1 \le c^2 \le \infty,$$

$$0 \le \frac{1}{c^2} \le 1,$$

$$1 - \frac{1}{c^2} \in [0,1].$$

При досить великому c параметр α стає як завгодно близьким до одиниці, тому відображення не стискальне.

Завдання 5.3. Показати, що рівняння $x = \sqrt[3]{x+2}$ можна розв’язати методом послідовного наближення й обчислити його корені з точністю до $0{,}01$.

Розв’язання. Необхідно довести, що рівняння задає стискальне відображення. За теоремою Банаха:

1. Відображення переводить відрізок $[a;b]$ у себе.
2. Виконується умова Липшиця

$$\exists f'(x) \text{ на } [a;b] \text{ і } |f'(x)| \le k < 1.$$

Маємо (рис. 11)

$$f_1(x) = x f_2(x) \sqrt[3]{x+2}\,.$$

$\bar{x} \in [0,2]$

1. $x = f(x),\ f(x)\sqrt[3]{x+2}$.
2. $f(x)$ відображає $[0,2]$ в себе.

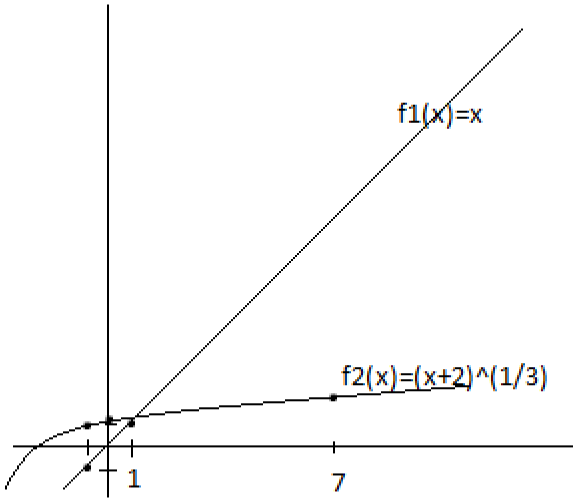

Рисунок 11

$$0 \le x \le 2,$$

$$2 \le x+2 \le 4,$$
$$\sqrt[3]{2} \le \sqrt[3]{x+2} \le \sqrt[3]{4},$$
$$\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right] \subset [0,2].$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3*\sqrt[3]{(x+2)^2}},$$
$$\sqrt[3]{4} \le \sqrt[3]{(x+2)^2} \le \frac{\sqrt[3]{16}}{2*\sqrt[3]{2}},$$
$$\frac{1}{6*\sqrt[3]{2}} \le f'(x) \le \frac{1}{3*\sqrt[3]{4}} \le \frac{1}{3},$$
$$|f'(x)| \le \frac{1}{3} < 1.$$

Це означає, що відображення є стискальним.

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = \sqrt[3]{1+2} = 1{,}442 + x_1,$$
$$x_1 = 1{,}442 \quad f(x_1) = \sqrt[3]{1{,}442+2} = 1{,}510 + x_2,$$
$$x_2 = 1{,}510 \quad f(x_2) = 1{,}520 + x_3,$$
$$x_3 = 1{,}520 \quad f(x_3) = 1{,}521 \ .$$

Отже, розв’язок $\bar{x} = 1{,}52$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 5.4. Показати, що рівняння $xe^x = 1$ задає стискальне відображення.

6 Вправи до розділу «Лінійні та нормовані простори»

Основні теоретичні відомості. Властивості норми:

1. $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0$ тільки в тому випадку, якщо $x = 0$.
2. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, a – число.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Завдання 6.1. Довести, що $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|$ визначає норму в просторі R^n.

Розв'язання. Перевіримо виконання властивостей норми:

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$,
2. $\|\alpha x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = |\alpha| \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$,
3. $\|x + y\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Завдання 6.2. Обчислити норми $\|x\|$, $\|x\|_{1,}$ $\|x\|_\infty$ елемента $c = (1;0;-7;2)$ в просторі R^n.

Розв'язання:

$$\|x\| = \sqrt{52},$$
$$\|x\|_1 = \sqrt{10},$$
$$\|x\|_\infty = 7.$$

Завдання 6.3. Обчислити норму елемента $x(t) = 2t - t^2 + 1$ у просторі $C_{[-1;2]}$.

Розв'язання:

$$\|x\| = \max_{-1 \leq t \leq 2} |x(t)| = \max_{-1 \leq t \leq 2} |2t - t^2 + 1| = 2.$$

Завдання 6.4. Знайти норму елемента в зазначеному просторі:

а) $\cos \pi t$ у просторі $C_{[0;1]}$; б) 2^t у просторі $C_{[-1;5]}$.

Розв'язання:

а) $\|x\| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |f(t)| = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\cos \pi t| = 1.$

б) $\|2^t\| = \max\limits_{-1 \leq t \leq 5} |2^t| = 2^5 = 32$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 6.5. Довести, що в просторі R^n норма може бути також задана формулою $\|x\|_\infty = \max|x_i|,\ 1 \le i \le n$.

7 Вправи до розділу «Евклідові простори»

Основні теоретичні відомості. Властивості скалярного добутку:

1. $(x, y) = (y, x)$.
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.
4. $(x, x) \ge 0$, причому $(x, x) = 0$ тільки в тому випадку, якщо $x = 0$.

Завдання 7.1. Обчислити скалярний добуток векторів $\bar{a}(2;-4;5;1)$ і $\bar{b}(0;2;3;0)$.

Розв'язання:

$$(\bar{a},\bar{b}) = 2\cdot 0 + (-4)\cdot 2 + 5\cdot 3 + 1\cdot 0 = 7,\ \bar{a},\ \bar{b} \in R^4.$$

Завдання 7.2. Обчислити скалярний добуток елементів $f(t) = t$ і $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ у просторі $C_{2[1,3]}$.

Розв'язання:

$$(f, g) = \int_1^3 t \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = \ln|t|\,\big|_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3.$$

Завдання 7.3 Обчислити скалярний добуток елементів $x(t) = t$, $y(t) = \dfrac{1}{t}$ у просторі $C_{2[1;2]}$.

Розв'язання:

$$(x, y) = \int_1^2 t \cdot \frac{1}{t} dt = 1.$$

Завдання 7.4 Обчислити скалярний добуток елементів $s_1 = \{1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9} \ldots\}$, $s_2 = \{0; \frac{3}{7}; \frac{9}{49}; \ldots\}$ у просторі l_2.

Розв'язання:

$$\left(s_{1,}s_2\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{49}+\ldots=\frac{1}{6}.$$

Завдання 7.5. Знайти скалярний добуток елементів $x=(1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\ldots)$, $y=(1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\ldots)$ у просторі l_2.

Розв'язання:

$$(x,y)=1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}+\ldots;$$

$$(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 7.6. Обчислити скалярний добуток елементів $x(t)=t$, $y(t)=\sin t$ у просторі $C_{2[0;1]}$.

Завдання 7.7. Обчислити скалярний добуток елементів $a=(-1;0;5)$, $b=(2;4;3)$ у просторі R^3.

8 Вправи до розділу «Гільбертові простори»

Основні теоретичні відомості. *Ряд Фур'є в гільбертовому просторі.* Рядом Фур'є називається вираз вигляду $\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$, де $\varphi_1,\varphi_2\ldots,\varphi_n,\ldots$ – ортогональна нормована система і $c_k=(f,\varphi_k)$, $k=1,2,\ldots,n$ – коефіцієнти Фур'є.

Завдання 8.1. Для заданого елемента побудувати ряд Фур'є за ортогональними системами зазначеного простору:

а) $a=(1;2/3;4/9;\ldots), a\in l_2$; б) $f\ (x)=x+1,\ C_{2[-\pi;\pi]}$.

Розв'язання:

а) Обчислимо коефіцієнти Фур'є заданого елемента за формулою

$$c_k=\left(f,\varphi_k\right),\ k=1,2,\ldots.$$

Отримаємо

$$c_1 = 1,.\ c_2 = 2/3,\ c_3 = 4/9,\dots.$$

Утворимо ряд Фур'є елемента $a = (1;2/3;4/9;\dots),\ a \in l_2$:

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k = 1(1;0;0\dots) + 2/3(0;1;0;\dots) + 4/9(0;0;1;\dots) + \dots =$$
$$= (1;2/3;4/9;\dots).$$

б) Обчислимо коефіцієнти Фур'є заданого елемента за формулою

$$c_k = (f, \varphi_k),\ k = 1,2,\dots$$

Отримаємо

$$c_1 = -\frac{\pi}{24},\ c_{2n} = \frac{1-(-1)^n}{6\pi n^2},\ c_{2n} = \frac{1-(-1)^n}{6\pi n^2},$$

Утворимо ряд Фур'є елемента $f(x) = x + 1$:

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k = -\frac{\pi}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{6\pi n^2}\cos nx + \frac{5(-1)^{n+1}}{6\pi}\sin nx.$$

Завдання 8.2. Розвинути елемент $I = (1/2;1/4;1/8;\dots) \in l_2$ за ортонормованою системою цього простору $e_1 = (1,0,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,\dots)$, … .

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти Фур'є заданого елемента за формулами

$$c_k = (f, \varphi_k),\ k = 1,2,\dots$$

Отримаємо

$$c_1 = 1/2,\ c_2 = 1/4,\ c_3 = 1/8,\dots$$

Утворимо ряд Фур'є елемента $I = (1/2;1/4;1/8;\dots) \in l_2$:

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1/4)^k \cdot c_k = 1/2(1,0,0,\dots) + 1/4(0,1,0,\dots) + 1/8(0,0,1,\dots) + \dots$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 8.3. Утворити ряд Фур'є функції $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ за ортогональною системою простору $C_{2[-\pi;\pi]}$.

9 Вправи до розділу «Лінійні функціонали в лінійних нормованих просторах»

Основні теоретичні відомості. Обмежений лінійний функціонал

$$|f(x)| \le M\|x\|,$$

де M – найменша з таких констант – норма $\|f\|$,

$$|f(x)| \le \|f\|\|x\|.$$

Завдання 9.1. Обчислити норму функціонала $f(x) = x(1) - 2x(2)$, заданого в просторі $C_{[0,2]}$.

Розв’язання:

$$|f(x)| = |x(1) - 2x(2)| \le |x(1) + |2x(2)|| =$$
$$= |x(1)| + 2|x(2)| \le 3\max_{0\le x\le 2}|x| = 3\|x\|.$$

Припустимо, що $\|f\| = 3$.

$$\|f\| \le \frac{|f(x)|}{\|x\|_{C_{[0,2]}}} = \frac{|x(1) - 2x(2)|}{\max\limits_{0\le t\le 2}|x(t)|},$$
$$\max_{0\le t\le 2}|x(t)| = 1.$$

Оберемо неперервну функцію $x(t)$, так, щоб $\max\limits_{0\le x\le 2}|x(t)| = 1$. Отже, $\|f\| = 3$ – норма функціонала.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 9.2 Обчислити норму функціонала $\|f\| = \int_0^1 x(t)dt$ у просторі $C_{2[0,1]}$.

10 Вправи до розділу «Лінійні оператори»

Основні теоретичні відомості. Нехай E_1 і E_2 – два лінійних нормованих простори. *Лінійним оператором,* діючим з E_1 у E_2, називається відображення $A = Ax$, $x \in E_1$, що задовольняє умовам:

1. $A(x+y)=Ax+Ay$ (адитивність).

2. $A(\alpha x)=\alpha Ax$ (однорідність).

Обмеженість лінійного оператора означає, що існує така константа M , що

$$\|Ax\|\le M\cdot\|x\|,\ \forall x\in E_1$$

Найменша з таких констант називається нормою оператора A і позначається $\|A\|$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 10.1. Оцінити норму інтегрального оператора Фредгольма в просторі $C_{[a;b]}$.

11 Вправи до розділу «Поняття міри»

Основні теоретичні відомості. *Замкнуті й відкриті множини на прямій.*

Множина називається *замкненою*, якщо вона співпадає зі своїм замкненням (тобто усі граничні точки містяться в цій множині)

Відкрита множина – це множина, яка складається тільки з внутрішніх точок.

Мірою інтервалу $(a;b)$ називається його довжина:

$$m(a;b)=b-a\,.$$

Міра відрізка $[a;b]$ дорівнює його довжині.

Завдання 11.1. Задана множина $A=[0;1)\cup 2$. Знайти її:

1. Граничні точки.
2. Межові точки.
3. Точки дотику.
4. Внутрішні точки.
5. Ізольовані точки.

Розв’язання:

1. Граничні точки $[0;1]$.
2. Межові точки $0,1,2$.
3. Точки дотику $[0;1],1$.
4. Внутрішні точки $(0;1)$.
5. Ізольована точка 2.

Завдання 11.2. Знайти міру зазначених множин на прямій:

1. $[0;2]$.
2. $[0;1)\cup 2$.

3. $[0;2)$.
4. $(0,1)\cup(4;5)\cup\{-1\}\cup\{10\}$.
5. $[2;5]\bigcup\{3\}\bigcup[7;8]$.
6. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k,\ E_k=[\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}]$.

Розв’язання:
1. $m[0;2]=2$.
2. $m([0;1]\cup 2)=2$.
3. $m(0;2]=2$.
4. $m((0;3)\cup(4;5)\cup\{-1\}\cup\{10\})=3$.
5. $m([2;5]\cup(3)\cup[7;8])=4$.
6. $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k,E_k=[\frac{1}{k+1};\frac{1}{k}]\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 11.3. Знайти граничні точки таких множин на числовій прямій. Указати замкнені множини.
1. R.
2. $\emptyset$.
3. Z.
4. $[0;1]$.
5. $(0;1)$.
6. $\left\{\frac{1}{n},n\in N\right\}$.
7. R^+ – позитивні числа.
8. R^- – негативні числа.

10 Вправи до розділу «Вимірні функції»

Основні теоретичні відомості. Вимірні функції на прямій: $f(x)$ – вимірна на множині E функція, якщо:
1. E – вимірна.
2. $E(f>a)$– вимірна для всіх дійсних a.

Критерій вимірності. Для того щоб майже усюди скінченна функція $f(x)$ була вимірною на відрізку $[a;b]$, необхідно й достатньо, щоб вона була майже всюди неперервною.

Завдання 10.1. Указати вимірні функції на заданій множині:
1. $f(x)=x+1,\ E=[0;3]$.

2. $f(x) = x + 1,\ E = [0;\infty)$.
3. $f(x) = x + 1,\ E = R$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ E = [0;3]$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ E = [1;3]$.
6. $f(x) = 5,\ E = [0;3]$.

Розв’язання:
1. Вимірна.
2. Невимірна, оскільки множина Е невимірна.
3. Невимірна, оскільки множина Е невимірна.
4. Вимірна.
5. Вимірна.
6. Вимірна.

Завдання 10.2. Довести, що функція $y = f(x),\ x \in R$ вимірна за Лебегом на R, якщо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} arctg\, \frac{x}{x^4 + n^4}.$$

Розв’язання. Для вимірності функції $f(x)$ необхідно й достатньо, щоб її можна було подати у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих, вимірних функцій.

Члени розглянутого ряду – неперервні функції на R, тому вимірні за Лебегом. Оскільки

$$\frac{x}{x^4 + n^4} \sim \frac{x}{n^4},$$

то заданий ряд є еквівалентним ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4},$$

який збігається. Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\, \frac{x}{x^4 + n^4}$$

також збігається, тому сума ряду є вимірною за Лебегом.

Завдання 10.3. Довести, що функція $y = f(x),\ x \in R$ вимірна за Лебегом на R, якщо

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos x}$$

Розв’язання. Члени розглянутого ряду є неперервними функціями на R. Розглянемо ряд, у якого

$$u_n=\frac{1}{n+\cos x},$$

$$u_2=\frac{1}{2+\cos x}>u_3=\frac{1}{3+\cos x}>u_4=\frac{1}{4+\cos x}>\ldots>,$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\cos x}=0.$$

Отже, заданий ряд також збігається. Тому сума ряду є вимірною за Лебегом.

11 Вправи до розділу «Інтеграл Лебега від обмеженої функції»

Основні теоретичні відомості*. Обчислення інтеграла Лебега.*

Критерій інтегрованості функції $f(x)$ за Ріманом. Для того щоб функція $f(x)$ була інтегрована за Ріманом, необхідно й достатньо, щоб вона була неперервною майже скрізь на відрізку $[a;b]$.

Зв'язок інтегралів Рімана і Лебега. Якщо функція $f(x)$ інтегрована за Ріманом на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована і за Лебегом на цьому відрізку, і обидва інтеграла рівні:

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_a^b f(x)dx.$$

Завдання 11.1. Обчислити інтеграл Лебега:

$$\int_{-[3;3]} sign\cos\pi x dx$$

$$sign\, t=\begin{cases}1 \text{ при } t>0\\ -1 \text{ при } t>0\\ 0 \quad t=0\end{cases}$$

Розв’язання. Розглянемо випадок $\cos\pi x>0$:

$$\pi x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right).$$

Розглянемо випадок $\cos \pi x < 0$:

$$\pi x \in \left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2};-\frac{7\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right).$$

Розглянемо випадок $\cos \pi x = 0$:

$$\pi x = -\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2},$$

$$x = 0 \quad A_1 = \left\{-\frac{5}{2};-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right\},$$

$$x > 0 \quad A_2 = \left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),$$

$$x < 0 \quad A_3 = \left(-3;-\frac{5}{2};\right).$$

Отже,

$$(L)\int_{-3}^{3} sign \cos \pi x dx = 0 \cdot m(A_1) + 1 \cdot m(A_2) - 1 \cdot m(A_3) = 0.$$

Завдання 11.2. Обчислити інтеграл Лебега від функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання:

$$(L)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Завдання 11.3. Обчислити інтеграл Лебега від функції

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x - \textit{раціональне}, \\ \cos x, & x - \textit{ірраціональне} \end{cases}$$

на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Використовуємо теорему про еквівалентні функції. Маємо: $f(x) \sim \cos x$, $x -$ ирац., якщо x – ірраціональне. Отже,

$$(L)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 11.4. Обчислити інтеграл Лебега від функції

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x - \textit{раціональне}, \\ \sin^2 x, & x - \textit{ірраціональне} \end{cases}$$

на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

12 Приклади завдань підвищеної складності

Завдання 12.1. Довести, що для будь-яких чотирьох точок x, y, z, t метричного простору (X,ρ) справедливі нерівності:

1. $|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\le\rho(x,y)$.
2. $|\rho(x,z)-\rho(y,t)|\le\rho(x,y)+\rho(z,t)$.

Завдання 12.2. Довести, що аксіоми метричного простору еквівалентні таким двом аксіомам:

1. $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.
2. $\rho(x,z)+\rho(y,z)\ge\rho(x,y)$.

Завдання 12.3. Нехай $\rho(x,y)$ – метрика на множині X. Довести, що функції:

1. $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{(1+\rho(x,y))}$
2. $\rho_2(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$

є метриками на X

Завдання 12.4. Довести, що вказані множини із заданими на них метриками є повними метричними просторами:

1. Множина l^∞ усіх обмежених числових послідовностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$, які задовольняють умові $\sum_{i=1}^{\infty}x_i<\infty$ з метрикою $\rho(x,y)=\sup_k|x_k-y_k|$.

2. Множина l^∞ усіх числових послідовностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$, які прагнуть до нуля, з метрикою $\rho(x,y)=\max_k|x_k-y_k|$.

3. Множина $C_{[a;b]}$ усіх неперервних функцій на відрізку $[a;b]$ з метрикою $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|$.

Завдання 12.5. Чи є лінійними такі функціонали в просторі $C_{[0;1]}$? У просторі $L_{2[0;1]}$?

1. $F(x)=\int_0^1 x(t)\cdot\sin t dt$, $F(x)=\dfrac{x}{2}$.

2. $F(x)=\int_0^1 x(t)\cdot sign\left(t-\dfrac{1}{2}\right)dt$, $F(x)=\int_0^1 x\left(t^2\right)\cdot t^{-2}dt$.

Завдання 12.6. Які з указаних операторів є неперервними?

1. $A: R^n \to R^n$ визначений формулою $y_i=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\tau_k, i=1,\ldots,n;$

2. $A: C[0,1]\to C[0,1]$ визначений формулою $Ax(t)=\int_0^1 x(\tau)d\tau;$

3. $\dfrac{d}{dt}: C^1[0,1]\to C[0,1]$.

2 КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ

Приклади завдань контрольної роботи 1

Варіант 1

1. Довести, що множина раціональних точок відрізку $[0;1]$ є зліченою.
2. Знайти норму елемента $y = \sqrt{x}$ у просторі $C_{[0;4]}$.
3. Дати означення поняття «внутрішня точка множини».
4. Довести, що перетин будь-якого числа замкнутих множин є замкненою множиною.

Варіант 2

1. Довести, що множина непарних чисел є зліченою.
2. Знайти норму елемента $y = x^3 + 2$ у просторі $C_{[0;4]}$.
3. Дати означення поняття «лінійно незалежні елементи».
4. Довести, що об'єднання скінченного числа замкнених множин є замкненою множиною

Варіант 3

1. Довести, що множина цілих чисел є зліченою.
2. Знайти норму елемента $y = e^x$ у просторі $C_{[0;4]}$.
3. Дати означення поняття «лінійний функціонал»
4. Довести, що перетин скінченного числа відкритих множин є відкритою множиною.

Варіант 4

1. Довести, що множина парних чисел є зліченою.
2. Знайти норму елемента $y = \sqrt{6 - x}$ у просторі $C_{[0;4]}$.
3. Дати означення поняття «компактна множина».
4. Довести, що об'єднання будь-якого числа відкритих множин є відкритою множиною.

Приклади завдань контрольної роботи 2

Варіант 1

1. Серед заданих множин вказати вимірну $(-2;1)$, $[4;\infty)$. Обчислити її міру.

2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = 2^x, \quad E = [0;3].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції $f(x) = x + 2$ в просторі $L_{2[-\pi;\pi]}$

Варіант 2

1. Серед заданих множин вказати вимірну $(-7;1), [-1;\infty)$. Обчислити її міру.

2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = x^{-2}, \quad E = [1;3].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції $f(x) = x$ в просторі $L_{2[-\pi;\pi]}$.

Варіант 3

1. Серед заданих множин вказати вимірну $(3;5), [3;\infty)$. Обчислити її міру.

2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = \cos x, \quad E = [0;\pi].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції $f(x) = x + 1$ в просторі $L_{2[-\pi;\pi]}$.

Варіант 4

1. Серед заданих множин вказати вимірну $(-1;1), [0;\infty)$. Обчислити її міру.

2. Обчислити інтеграл Лебега від функції за вказаною множиною:

$$f(x) = x + e^x, \quad E = [0;1].$$

3. Скласти ряд Фур'є для функції $f(x) = x - 1$ в просторі $L_{2[-\pi;\pi]}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Швець В. Т. Вища математика: теорія функцій комплексної змінної Одеса. Видавництво БМВ, 2014 - 284 с
2. Balakrishnan A.V. Applied Functional Analysis Springer-Verlag, 1981. - 373 p.
3. Abramovich Y., Avgerinos E., Yannelis N.C. (eds.) Functional Analysis and Economic Theory Springer, 1998. — 300 p.
4. Теорія функцій комплексної змінної: / Уклад.: Є. В. Массалітіна, О. О. Кільчинський. – К.: НТУУ „КПІ”, 2008. – 54 с.
5. Березанський Ю. М. Функціональний аналіз / Ю. М. Березанський, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – Львів : Університетська бібліотека, 2015. – 559 с., ISBN 978-966-2645-12-5.
6. Підкуйко С.І. Функціональні послідовності та ряди / С.І. Підкуйко, М.В. Баб'як. – Львів : Число, 2015. – 184 с., ISBN 978-966-2645-07-1.
7. В.М. Кадець, Курс функціонального аналізу та теорії міри. Університетська бібліотека. 2015. – 590 с., ISBN 978-966-2645-02-6.
8. Сторож О. Г. Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу / О. Г. Сторож. – Львів : Число, 2015. – 152 с., ISBN 978-966-2645-00-2.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Теорія функцій»
для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»

Укладач РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна

За авторською редакцією
Комп'ютерна верстка О. Г. Ровенська

120/2009. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк.
Обл.-вид. арк. 2,27. Тираж 300 прим. Зам. № 31.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003.